Zyklen von indefiniten binären quadratischen Formen und die engere Idealklassengruppe reell quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante $d < 10^6$

von Daniel C. Mayer.

Dem Gedächtnis an Alexander Aigner gewidmet.

1. Einleitung.

Die Neuberechnung und Veröffentlichung der Klassenzahlen aller reell quadratischen Zahlkörper mit Diskriminanten im Bereich $0 < d < 10^6$ war schon seit etwa zwei Jahrzehnten eines meiner dringendsten Anliegen. Es gab meines Wissens bereits zwei derartige Tabellen, einerseits von A. O. L. Atkin und andererseits von J. Buchmann, die aber nicht mehr öffentlich zugänglich sind.

Mein erster Versuch der systematischen Erfassung von Information über reell quadratische Zahlkörper [2] im Jahr 1991 musste wegen des immensen Zeitbedarfs und sehr beschränkten Arbeitsspeichers der damaligen Rechner bei der oberen Grenze $2 \cdot 10^5$ abgebrochen werden.

Im Juni des Jahres 2009 gelang es mir nun aufgrund der fortgeschrittenen Computer-Technologie, mein langersehntes Ziel zu erreichen.

2. Begriffe und Methoden.

Für einen reell quadratischen Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit der Diskriminante $d > 0$ ist die engere Klassengruppe $\mathcal{I}/\mathcal{P}^+$, bei der die Hauptklasse $\mathcal{P}^+$ nur von den Zahlen positiver Norm erzeugt wird, isomorph zur Gruppe der Zyklen von reduzierten indefiniten binären quadratischen Formen der Diskriminante d mit der Komposition als Gruppenoperation. Im Fall einer normpositiven Grundeinheit $N_{K|\mathbb{Q}}(\varepsilon_0) = +1$, also einer geraden Periodenlänge der Kettenbruchentwicklung der erzeugenden quadratischen Irrationalität $\sqrt{d}$, ist die engere Klassenzahl h^+ doppelt so groß wie die gewöhnliche Klassenzahl h, anderenfalls ist $h = h^+$.

3. Die Anzahl quadratischer und kubischer Grunddiskriminanten.

Ich beginne mit der Anzahl #(total) aller quadratischen Grunddiskriminanten, also Diskriminanten d von Hauptordnungen reell quadratischer Zahlkörper, in den Bereichen $0 < d < 10^n$ für $n = 1, \ldots, 6$.
Die Anzahl $\#(3|h)$ der Diskriminanten von reell quadratischen Körpern mit durch 3 teilbarer Klassenzahl h ist gemäß der Klassenkörpertheorie genau die Anzahl der Diskriminanten von total reellen kubischen Zahlkörpern, deren Normalkörper über ihren quadratischen Teilkörpern unverzweigt sind.

$0 < d <$	#(total)	$\#(3\|h)$
10	2	0
100	30	0
1 000	302	15
10 000	3 043	248
100 000	30 394	3 305
1 000 000	303 957	38 074

Zum Vergleich dazu gebe ich die analoge Zusammenstellung für komplexe quadratische Zahlkörper mit Diskriminanten im Bereich $-10^6 < d < 0$ an, die von mir bereits im November 1990 vollendet wurde.
Die Anzahl $\#(3|h)$ der Diskriminanten von komplexen quadratischen Körpern mit durch 3 teilbarer Klassenzahl h ist genau die Anzahl der Diskriminanten von komplexen kubischen Zahlkörpern, deren Normalkörper über ihren quadratischen Teilkörpern unverzweigt sind.

$0 > d >$	#(total)	$\#(3\|h)$
−10	4	0
−100	31	5
−1 000	305	84
−10 000	3 043	1 041
−100 000	30 392	11 500
−1 000 000	303 968	121 645

Über komplexen quadratischen Körpern gibt es also mehr als dreimal so viele unverzweigte zyklisch kubische Relativerweiterungen wie über reell quadratischen Körpern.

Die Anzahlen für die absoluten Intervalle mit Vielfachen von 100 000 als Länge sind:

$0 < d <$	#(total)	$\#(3\|h)$
100 000	30 394	3 305
200 000	60 788	6 940
300 000	91 186	10 710
400 000	121 579	14 535
500 000	151 973	18 439
600 000	182 386	22 324
700 000	212 762	26 243
800 000	243 168	30 163
900 000	273 572	34 105
1 000 000	303 957	38 074

Ergänzend gebe ich die Anzahlen für die relativen Intervalle der Länge 100 000 an:

d	#(relativ)	$\#(3\|h)$
$0 < d < 100\,000$	30 394	3 305
$100\,000 < d < 200\,000$	30 394	3 635
$200\,000 < d < 300\,000$	30 398	3 770
$300\,000 < d < 400\,000$	30 393	3 825
$400\,000 < d < 500\,000$	30 394	3 904
$500\,000 < d < 600\,000$	30 413	3 885
$600\,000 < d < 700\,000$	30 376	3 919
$700\,000 < d < 800\,000$	30 406	3 920
$800\,000 < d < 900\,000$	30 404	3 942
$900\,000 < d < 1\,000\,000$	30 385	3 969

Die Anzahl der Diskriminanten mit durch 3 teilbarer Klassenzahl nimmt also beinahe monoton zu, während die Gesamtzahl aller Diskriminanten für die relativen Intervalle im wesentlichen konstant bleibt.

4. Die Verteilung der Klassenzahlen und Periodenlängen.

Die größte vorkommende engere Klassenzahl ist $h^+ = 392 = 2 \cdot h$ für $d = 767\,449$ mit $3\,616$ reduzierten Formen. Hier ist die gewöhnliche Klassenzahl nur $h = 196$. Unter den gewöhnlichen Klassenzahlen tritt das Maximum $h = h^+ = 254$ bei $d = 705\,601$ mit $3\,256$ reduzierten Formen auf. Die größte Anzahl reduzierter Formen $n = 4\,698$ ergibt sich für $d = 979\,969$ mit $h = h^+ = 1$.

Auch bei den Periodenlängen wird das Maximum $\ell = 2\,349$ für $d = 979\,969$ angenommen. Die Anzahl aller reduzierten Formen ist genau die doppelte Periodenlänge $n = 2\ell$, eine charakteristische Eigenschaft aller reell quadratischen Körper mit gewöhnlicher Klassenzahl $h = 1$. Die Diskriminante $d = 979\,969$ weist auch den größten Regulator $2\,705,3$ und die maximale Länge von $2\,350$ Zeichen der dezimalen Zifferndarstellung der Grundeinheit in der Form $\varepsilon_0 = (U + V\sqrt{d})/T$ mit $U, V, T \in \mathbb{Z}$ auf.

Die folgende Tabelle zeigt die Statistik der kleinsten Periodenlängen ℓ mit einer Dominanz gerader Längen:

ℓ	$d < 10\,000$	$d < 100\,000$	$d < 1\,000\,000$
1	67	210	667
2	187	753	2 861
3	75	267	866
4	220	954	3 891
5	57	218	758
6	165	815	3 416
7	60	221	742
8	101	549	2 562
9	62	237	754
10	138	768	3 339
11	42	186	701
12	96	551	2 584

Die Statistik der kleinsten engeren Klassenzahlen h^+ ist in folgender Tabelle zusammengefasst:

h^+	$d < 10\,000$	$d < 100\,000$	$d < 1\,000\,000$
1	516	3 806	30 713
2	976	8 093	68 898
3	55	507	4 288
4	856	8 109	77 174
5	20	176	1 463
6	103	966	9 464
7	9	95	739
8	294	3 905	44 676
9	6	63	461
10	34	371	3 238
11	1	28	241
12	65	1 008	10 419

Zum Vergleich dazu die Statistik der kleinsten gewöhnlichen Klassenzahlen h mit einer Vermehrung der ungeraden Klassenzahlen:

h	$d < 10\,000$	$d < 100\,000$	$d < 1\,000\,000$
1	1 282	10 079	83 463
2	968	8 916	83 324
3	140	1 261	11 531
4	374	4 707	52 322
5	47	464	3 946
6	73	1 094	11 268
7	22	223	1 932
8	67	1 365	18 620
9	8	139	1 267
10	21	395	3 903
11	3	78	740
12	23	551	6 955

Die Verteilung der Diskriminanten mit normpositiver und normnegativer Grundeinheit ε_0 ist aus folgender Tabelle ersichtlich:

	$d < 10\,000$	$d < 100\,000$	$d < 1\,000\,000$
total	3 043	30 394	303 957
$N_{K\vert\mathbb{Q}}(\varepsilon_0) = +1$	2 064	21 897	228 045
$N_{K\vert\mathbb{Q}}(\varepsilon_0) = -1$	979	8 497	75 912

Zum Vergleich dazu die Verteilung der quadratfreien Radikanden D mit normpositiver und normnegativer Grundeinheit ε_0 aus meiner Abhandlung [1] im Jahre 1988:

	$D < 10\,000$	$D < 100\,000$
total	6 082	60 793
$N_{K\vert\mathbb{Q}}(\varepsilon_0) = +1$	4 838	49 943
$N_{K\vert\mathbb{Q}}(\varepsilon_0) = -1$	1 244	10 850

Graz, im Juni 2009

Referenzen.

[1] D. C. Mayer, Lattice minima and units in real quadratic number fields, Publ. Math. Debrecen **39** (1991), 19–86.

[2] D. C. Mayer, List of discriminants $d_L < 200\,000$ of totally real cubic fields L, arranged according to their multiplicities m and conductors f, 1991, Department of Computer Science, University of Manitoba.