§ A.3.1. Partielle Kapitulationsarten für $p = 3$ als S_4-Orbits von Quartetten $\varkappa \in [1, 4]^4$ (A. Scholz und O. Taussky, 1934; D. C. Mayer, 1991)

Skt.	Nr.	Orbit-vertreter $\varkappa$	Besetzungs-zahlen $o(\varkappa)$	Anz. Fixp. $\lvert F\rvert$	Charakterist. Eigenschaft	Orbit-mächtigk. $\lvert\varkappa^{S_4}\rvert$	Symbolische Ordnung $\mathfrak{M}$
A	**1**	(1111)	(04000)	1	Konstante	4	$\mathfrak{L}$
B	2	(1211)	(03100)	2		12	unmöglich
B	3	(1112)	(03100)	1		24	unmöglich
H	**4**	(2111)	(03100)	0		12	$\mathfrak{L}_2, \mathfrak{Z}', \mathfrak{X}_\alpha, \mathfrak{Z}'_\alpha, \mathfrak{R}_{\alpha,\beta}, \mathfrak{V}_{\alpha,\beta}$
D	**5**	(1212)	(02200)	2		12	$\mathfrak{L}_2$
E	**6**	(1122)	(02200)	1		12	$\mathfrak{X}_\alpha$
F	**7**	(2112)	(02200)	0		12	$\mathfrak{R}_{\alpha,\beta}$
E	**8**	(1231)	(02110)	3		12	$\mathfrak{X}_\alpha$
E	**9**	(1213)	(02110)	2		24	$\mathfrak{X}_\alpha$
D	**10**	(1123)	(02110)	1	$D \setminus F \subset I$	24	$\mathfrak{L}_2$
F	**11**	(1321)	(02110)	1	$D \setminus F \not\subset I$	12	$\mathfrak{R}_{\alpha,\beta}$
F	**12**	(3211)	(02110)	1	$D \cap F = \emptyset$	24	$\mathfrak{R}_{\alpha,\beta}$
F	**13**	(2113)	(02110)	0	$D \subset I$	24	$\mathfrak{R}_{\alpha,\beta}$
E	**14**	(2311)	(02110)	0	$D \not\subset I$	24	$\mathfrak{X}_\alpha$
C	15	(1234)	(01111)	4	Identität	1	unmöglich
G	**16**	(2134)	(01111)	2	Transposition	6	$\mathfrak{X}_\alpha, \mathfrak{Z}_\alpha, \mathfrak{R}_{\alpha,\beta}, \mathfrak{V}'_{\alpha,\beta}$
C	17	(1342)	(01111)	1	3-Zyklus	8	unmöglich
C	18	(2341)	(01111)	0	4-Zyklus	6	unmöglich
G	**19**	(2143)	(01111)	0	2 disj. Transp.	3	$\mathfrak{L}_2, \mathfrak{Z}, \mathfrak{R}_{\alpha,\beta}, \mathfrak{T}_{\alpha,\beta}$
					gesamt:	256	

Dabei bedeutet
$o(\varkappa) = (\lvert\varkappa^{-1}(i)\rvert)_{0 \le i \le 4}$ die Familie der Besetzungszahlen von $\varkappa$ unter Berücksichtigung der unbesetzten 0,
$F = \{1 \le i \le 4 \mid \varkappa(i) = i\}$ die Menge der Fixpunkte von $\varkappa$,
$I = \{\varkappa(i) \mid 1 \le i \le 4\}$ das Bild von $\varkappa$,
$D = \varkappa^{-1}(o^{-1}(2)) = \{i, j\}$, falls $\varkappa(i) = \varkappa(j)$ für $1 \le i \ne j \le 4$.
Die auftretenden symbolischen Ordnungen $\mathfrak{M} \lhd \mathbb{Z}[X, Y]$ sind:
$\mathfrak{R}_{\alpha,\beta} = (X^\alpha, XY, Y^\beta, \mathrm{S}_3(xy))$, $\alpha \ge 3$, $\beta \ge 3$,
$\mathfrak{X}_\alpha = (X^\alpha, XY, Y^2, \mathrm{S}_3(x))$, $\alpha \ge 3$,
$\mathfrak{L}_2 = (X^2, XY, Y^2, 3)$, $\mathfrak{L} = (X, Y, 3)$,
$\mathfrak{T}_{\alpha,\beta} = (X^\alpha, XY, Y^\beta, X^{\alpha-1} \pm Y^{\beta-1}, X^{\alpha-1} \pm \mathrm{S}_3(xy))$, $\alpha \ge 3$, $\beta \ge 3$,
$\mathfrak{V}_{\alpha,\beta} = (X^\alpha, Y^\beta, X^{\alpha-1} \pm XY, X^{\alpha-1} \pm Y^{\beta-1}, \mathrm{S}_3(x) + \mathrm{S}_3(y) - 3)$, $\alpha \ge 3$, $\beta \ge 3$,
$\mathfrak{V}'_{\alpha,\beta} = (X^\alpha, Y^\beta, X^{\alpha-1} \pm XY, X^{\alpha-1} \pm Y^{\beta-1}, XY + \mathrm{S}_3(xy))$, $\alpha \ge 3$, $\beta \ge 3$,
$\mathfrak{Z}_\alpha = (X^\alpha, XY, Y^3, X^{\alpha-1} \pm \mathrm{S}_3(x), X^{\alpha-1} \pm Y^2)$, $\alpha \ge 3$,
$\mathfrak{Z}'_\alpha = (X^\alpha, XY, Y^3, \mathrm{S}_3(x), X^{\alpha-1} \pm Y^2)$, $\alpha \ge 3$,
$\mathfrak{Z} = (X^3, XY, Y^3, 3, X^2 \pm Y^2)$, $\mathfrak{Z}' = (X^3, XY, Y^3, X^2 \pm 3, X^2 \pm Y^2)$.

§ **A.3.2. Statistik der Kapitulation** über **komplex quadratischen** Zahlkörpern mit Diskriminante $-51\,000 < d < 0$ und 3-Klassengruppe vom Typ $(3,3)$
(D. C. Mayer, 2003)

Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen für S_4-Orbits von Quartetten $\kappa \in [1,4]^4$:
D.10 für $\kappa = (1123)$ **D.5** für $\kappa = (1212)$
H.4 für $\kappa = (2111)$
E.6,8,9,14 für $\kappa = (1122), (1231), (1213), (2311)$
G.16 für $\kappa = (2134)$ **G.19** für $\kappa = (2143)$
F.7,11,12,13 für $\kappa = (2112), (1321), (3211), (2113)$

Nr.	**D.10**	**D.5**	**H.4**	**E**	**G.16**	**G.19**	**F**
1	−4 027	−12 131	−3 896	−9 748	−17 131	−12 067	−27 156
2	−8 751	−19 187	−6 583	−15 544	−24 884	−49 924	−31 908
3	−19 651	−20 276	−21 668*	−16 627	−28 279		
4	−21 224	−20 568	−23 428	−18 555	−35 539		
5	−22 711	−24 340	−25 447	−22 395			
6	−24 904	−26 760	−27 355	−22 443			
7	−26 139	−31 639	−27 991	−23 683			
8	−28 031	−31 999	−34 027*	−27 640			
9	−28 759	−32 968	−36 276	−31 271			
10	−34 088	−34 507	−37 219	−34 867			
11	−36 807	−35 367	−37 540	−37 988			
12	−40 299	−41 583	−39 819	−39 736			
13	−40 692	−41 671	−41 063	−42 619			
14	−41 015	−43 307	−43 827	−42 859			
15	−42 423		−46 551	−43 847			
16	−43 192			−45 887			
17	−44 004			−48 472			
18	−45 835			−48 667			
19	−46 587			−50 983			
20	−48 052						
21	−49 128						
22	−49 812						
23	−50 739						
24	−50 855						
#	24	14	15	19	4	2	2

In 38 von 80 Fällen (für 48% der Diskriminanten): 3-Klassenkörperturm **zweistufig**.

§ A.3.3. Totale Kapitulationsarten für $p = 3$
als S_4-Orbits von Quartetten $\varkappa \in [0, 4]^4$
(B. Nebelung, 1989; D. C. Mayer, 2006)

Skt.	Nr.	Orbit-vertreter $\varkappa$	Besetzungs-zahlen $o(\varkappa)$	Anz. Fixp. $\lvert F\rvert$	Charakterist. Eigenschaft	Orbit-mächtigk. $\lvert\varkappa^{S_4}\rvert$	Symbolische Ordnung
a	**1**	(0000)	(40000)	0	Konstante	1	$(1), \mathfrak{Y}'_\alpha$
a	**2**	(1000)	(31000)	1		4	$\mathfrak{Y}_\alpha$
a	**3**	(0100)	(31000)	0		12	$\mathfrak{Y}_\alpha$
e	4	(1100)	(22000)	1		12	unmöglich
e	5	(0110)	(22000)	0		12	unmöglich
e	6	(1200)	(21100)	2		6	unmöglich
e	7	(1020)	(21100)	1		24	unmöglich
e	8	(0012)	(21100)	0	$D \subset I$	12	unmöglich
e	9	(0120)	(21100)	0	$\#(D \cap I) = 1$	24	unmöglich
b	**10**	(2100)	(21100)	0	$D \cap I = \emptyset$	6	$\mathfrak{L}_2, \mathfrak{X}_\alpha, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_\alpha$
e	11	(1110)	(13000)	1		12	unmöglich
e	12	(0111)	(13000)	0		4	unmöglich
e	13	(1210)	(12100)	2		24	unmöglich
e	14	(1120)	(12100)	1	$D \setminus F \subset I$	24	unmöglich
e	15	(1012)	(12100)	1	$D \setminus F \not\subset I$	24	unmöglich
e	16	(0211)	(12100)	1	$D \cap F = \emptyset$	12	unmöglich
e	17	(0112)	(12100)	0	$\#(D \cap I) = 1, Z \subset I$	24	unmöglich
c	**18**	(2011)	(12100)	0	$D \cap I = \emptyset$	12	$\mathfrak{L}_2, \mathfrak{X}_\alpha$
d	**19**	(2110)	(12100)	0	$Z \not\subset I$	24	$\mathfrak{X}_\alpha$
e	20	(1230)	(11110)	3	Identität und 0	4	unmöglich
c	**21**	(1203)	(11110)	2		12	$\mathfrak{L}_2, \mathfrak{X}_\alpha$
e	22	(1023)	(11110)	1	$Z \subset I$	24	unmöglich
d	**23**	(1320)	(11110)	1	$Z \not\subset I$	12	$\mathfrak{X}_\alpha$
e	24	(0123)	(11110)	0	$Z \subset I$, 4-Zyklus und 0	24	unmöglich
d	**25**	(0321)	(11110)	0	$Z \subset I$, 2 disj. Transp. und 0	12	$\mathfrak{X}_\alpha$
e	26	(2310)	(11110)	0	$Z \not\subset I$	8	unmöglich
					gesamt:	369	

Dabei bedeutet
$o(\varkappa) = (|\varkappa^{-1}(i)|)_{0 \le i \le 4}$ die Familie der Besetzungszahlen von $\varkappa$,
$F = \{1 \le i \le 4 \mid \varkappa(i) = i\}$ die Menge der Fixpunkte von $\varkappa$,
$I = \{\varkappa(i) \mid 1 \le i \le 4\}$ das Bild von $\varkappa$, $Z = \varkappa^{-1}(0)$,
$D = \varkappa^{-1}(o^{-1}(2)) = \{i, j\}$, falls $\varkappa(i) = \varkappa(j)$ für $1 \le i \ne j \le 4$.
Die neu auftretenden symbolischen Ordnungen $\mathfrak{M} \lhd \mathbb{Z}[X, Y]$ sind:
$\mathfrak{Y}_\alpha = (X^\alpha, Y, \mathrm{S}_3(x))$, $\alpha \ge 2$, $\mathfrak{Y}'_\alpha = (X^\alpha, X^{\alpha-1} \pm Y, \mathrm{S}_3(x))$, $\alpha \ge 3$.

§ A.3.4. Statistik der Kapitulation über **reell quadratischen** Zahlkörpern
mit Diskriminante $0 < d < 602\,000$ und 3-Klassengruppe vom Typ $(3,3)$ (D. C. Mayer, 2009)
Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen für S_4-Orbits von Quartetten $\kappa \in [0,4]^4$:
a.3 für $\kappa = (0100)$ mit $\mathrm{Cl}_3(N_2)$ vom Typ $(9,3)$ **a.3*** für $\kappa = (0100)$ mit $\mathrm{Cl}_3(N_2)$ vom Typ $(3,3,3)$
a.2 für $\kappa = (1000)$ **a.1** für $\kappa = (0000)$ **c.18** für $\kappa = (2011)$ **c.21** für $\kappa = (1203)$

Nr.	**a.3**	**a.3***	**a.2**	**a.1**	**D.10**	**E.9**	**G.19**	**c.18**	**c.21**
1	32 009	142 097	72 329	62 501	422 573	342 664	214 712	534 824	540 365
2	42 817	173 944	94 636	152 949	502 796				
3	103 809	259 653	153 949	252 977	575 729				
4	114 889	283 673	189 273	358 285					
5	130 397	320 785	206 776	531 437					
6	151 141	321 053	209 765	586 760					
7	172 252	326 945	214 028	595 009					
8	184 137	335 229	219 461						
9	213 913	412 277	275 881						
10	220 217	424 236	390 876						
11	250 748	459 964	400 369						
12	265 245	471 713	431 761						
13	298 849	476 152	460 817						
14	333 656	527 068	486 581						
15	341 724	535 441	548 549						
16	363 397	551 384	551 692						
17	371 965	567 473	552 392						
18	415 432								
19	449 797								
20	468 472								
21	471 057								
22	476 124								
23	486 221								
24	494 236*								
25	510 337								
26	531 445								
27	549 133								
28	557 657								
29	578 581								
30	593 941								
31	597 068								
32	600 085								
#	32	17	17	7	3	1	1	1	1

In 68 von 80 Fällen (für 85% der Diskriminanten): 3-Klassenkörperturm **zweistufig**.